3. cvičení - teorie

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že L je *vlastní limita posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ (resp. $-\infty$), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K \text{ (resp. } < K).$$

Limity jsou jednoznačně určené.

Věta 2.3 (limita podposloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel s limitou $A \in \mathbb{R}$. Buď posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom už $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Věta 2.8 (VoAL) (Aritmetika limit)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a mějme $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

- $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$, máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$, máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, máli pravá strana smysl.

Věta 2.2. Pokud má posloupnost reálnou limitu, pak je omezená.

Věta 2.5 ($0\cdot$ omezená)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující:

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená,
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

potom je $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Věta (O posloupnosti s kladnými členy)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných reálných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A,$ *(nelze použít u zkoušky)*
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$ *(nelze použít u zkoušky)*
- $\lim_{n\to\infty} a_n = A \iff \lim_{n\to\infty} {a_n}^m = A^m \iff \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}$ pro $m \in \mathbb{N}$.

Aritmetika s nekonečny
$a > 0 \implies a \cdot \infty = \infty$
$a < 0 \implies a \cdot \infty = -\infty$
$\forall a \in \mathbb{R}\colon a + \infty = \infty$
$\forall a \in \mathbb{R}\colon a - \infty = -\infty$

<u>Nedefinované výrazy:</u>
$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty), \frac{\infty}{\infty}, 0^0$

Může se hodit

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$